Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра исследования операций

Численное решение краевой задачи для уравнения Пуассона с потенциалом в прямоугольной области

Второе задание по курсу «Суперкомпьютерное моделирование и технологии»

Выполнила:
студентка 611 группы
В.М. Кобзева
Вариант 1

Москва, 2020

Содержание

1 Постановка задачи

В прямоугольнике $\Pi = [A_1, A_2] \times [B_1, B_2]$, граница Γ которого состоит из отрезков

$$\gamma_R = \{(A_2, y), B_1 \leqslant y \leqslant B_2\}, \quad \gamma_L = \{(A_1, y), B_1 \leqslant y \leqslant B_2\},$$
$$\gamma_T = \{(x, B_2), A_1 \leqslant x \leqslant A_2\}, \quad \gamma_B = \{(x, B_1), A_1 \leqslant x \leqslant A_2\},$$

рассматривается дифференциальное уравнение Пуассона с потенциалом

$$-\Delta u + q(x,y)u = F(x,y), \tag{1}$$

в котором оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x}\Big(k(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(k(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\Big).$$

Для выделения единственного решения уравнение (1) дополняется граничными условиями. На каждом отрезке границы прямоугольника Π задаются следующие условия:

$$\gamma_R : u(x,y) = \varphi(x,y), \quad \gamma_L : u(x,y) = \varphi(x,y),$$
$$\gamma_T : u(x,y) = \varphi(x,y), \quad \gamma_B : u(x,y) = \varphi(x,y).$$

Функции $F(x,y)$, $\varphi(x,y)$, коэффициент $k(x,y)$, потенциал $q(x,y)$ считаются известными. Требуется найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (1) и граничным условиям.

1. пользуясь явным видом функций $u(x,y)$, $k(x,y)$, $q(x,y)$ определить правую часть уравнения Пуассона $F(x,y)$ и граничные условия $\varphi(x,y)$;

2. собрать разностную схему для уравнения Пуассона с граничными условиями;

3. разработать последовательный код программы, вычисляющий приближенное решение разностной схемы методом наименьших невязок, проверить точность схемы, выполнив расчеты на сгущающихся сетках

$$(M,N) = (20,20),\ (40,40),\ (80,80),\ (160,160);$$

4. используя средства библиотеки MPI, разработать параллельный код программы, вычисляющий приближенное решение разностной схемы методом наименьших невязок, проверить качество работы алгоритма, выполнив расчеты на сетке $(M,N) = (160,160)$ на одном, четырех и шестнадцати процессах;

5. провести исследование параллельных характеристик MPI-программы, выполнив расчеты на вычислительных комплексах IBM BlueGene/P и IBM Polus;

6. разработать гибридный MPI / OpenMP код программы, провести исследование параллельных характеристик гибридной программы и сравнить полученные результаты с программой, не использующей директивы OpenMP.

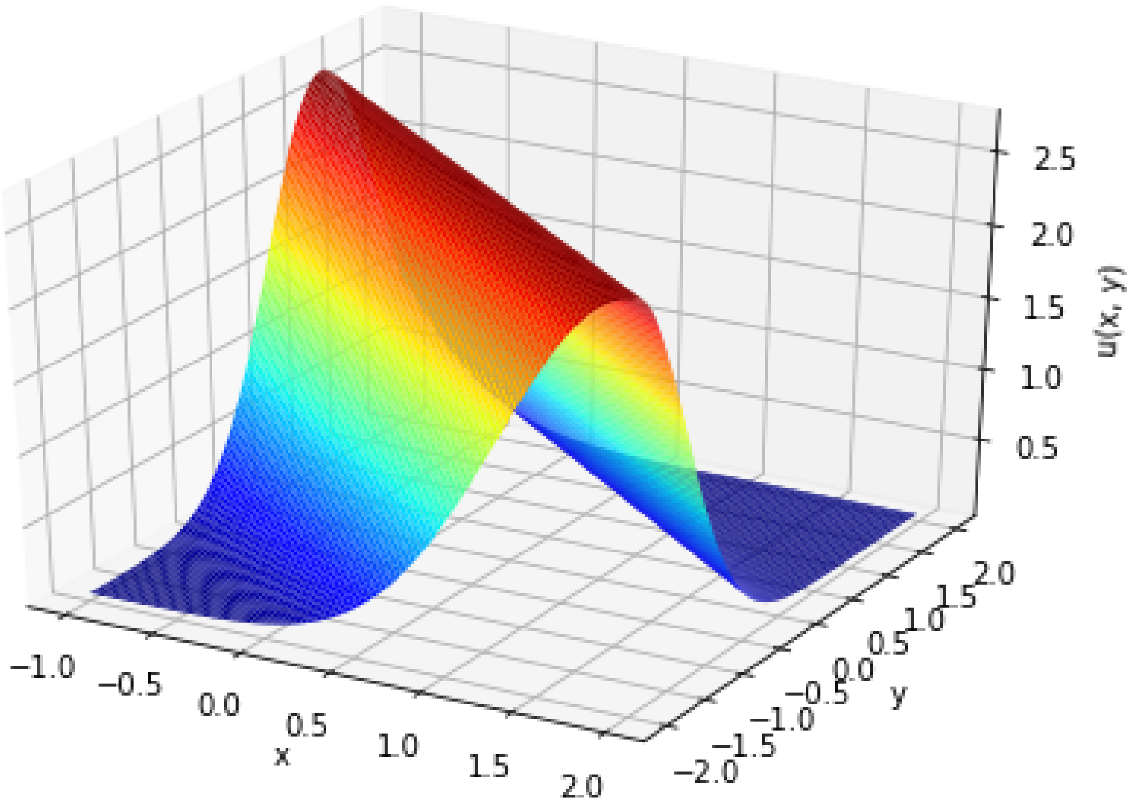
В соответствии с вариантом задания рассматриваю следующие данные:

- $A_1 = -1$, $A_2 = 2$, $B_1 = -2$, $B_2 = 2$,
- $u(x,y) = u_1(x,y) = \exp(1 - (x+y)^2)$,
- $k(x,y) = k_2(x,y) = 4 + x$,
- $q(x,y) = q_3(x,y) = (x+y)_+^2 = (x+y)^2$, так как $(x+y)^2 \geq 0$ при $\forall x \in R, \forall y \in R$,
- граничные условия γ_R, γ_L, γ_T, γ_B показаны выше.

Задача. *Задача практикума заключается в восстановлении известной гладкой функции $u(x,y)$ по её образу $F(x,y) = -\Delta u + q(x,y)u$ и её граничным значениям.*

Нужно восстановить следующий вид функции $u(x, y)$:

$$u(x, y) = \exp(1 - (x+y)^2)$$



2 Определение функций $F(x, y)$, $\varphi(x, y)$

Определим функцию $F(x, y)$. Для этого вычислим оператор Лапласа, используя явные вид функций $u(xy)$, $k(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2(x+y)\exp(1-(x+y)^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2(x+y)\exp(1-(x+y)^2)$$

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2(x+4)(x+y)\exp(1-(x+y)^2)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-2(x+4)(x+y)\exp(1-(x+y)^2)\right) =$$
$$= \exp(1-(x+y)^2)\cdot\left(8(x+y)^2(x+4) - 2(x+y) - 4(x+4)\right).$$

Учитывая, что $q(x, y)u = (x+y)^2\exp(1-(x+y)^2)$, то

$$F(x, y) = \exp(1-(x+y)^2)\left(2(x+y) + 4(x+4) + (x+y)^2 - 8(x+4)(x+y)^2\right). \quad (2)$$

Теперь определим функцию $\varphi(x, y)$.

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \exp(-y^2+2y), & x=-1, \widetilde{y}\in[-2,2]; \\ \exp(-y^2-4y-3), & x=2, \widetilde{y}\in[-2,2]; \\ \exp(-x^2+4x-3), & \widetilde{x}\in[-1,2], y=-2; \\ \exp(-x^2-4x-3), & \widetilde{x}\in[-1,2], y=2. \end{cases} \quad (3)$$

3 Разностная схема решения задачи

Краевые задачи для уравнения Пуассона с потенциалом (1) предлагается численно решать методом конечных разностей. В расчетной области П определяется равномерная прямоугольная сетка $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$, где

$$\bar{\omega}_1 = \{x_i = -1 + ih_1,\ i = \overline{0, M}\},\ \bar{\omega}_2 = \{y_j = -2 + jh_2,\ j = \overline{0, N}\}.$$

Здесь $h_1 = 3/M$, $h_2 = 4/N$. Через ω_h обозначим множество внутренних узлов сетки $\bar{\omega}_h$, т.е. множество узлов сетки прямоугольника, не лежащих на границе Г.

Рассмотрим линейное пространство H функций, заданных на сетке $\bar{\omega}_h$. Обозначим через w_{ij} значение сеточной функции $w \in H$ в узле сетки $(x_i, y_j) \in \bar{\omega}_h$. Будем считать, что в пространстве H задано скалярное произведение и евклидова норма

$$[u, v] = \sum_{i=0}^{M} h_1 \sum_{j=0}^{N} h_2 \rho_{ij} u_{ij} v_{ij} = h_1 h_2 \sum_{i=0}^{M} \sum_{j=0}^{N} \rho_{ij} u_{ij} v_{ij}, \quad \|u\|_E = \sqrt{[u, u]}. \tag{4}$$

Весовая функция $\rho_{ij} = \rho^{(1)}(x_i)\rho^{(2)}(y_j)$, где

$$\rho^{(1)}(x_i) = \left[\begin{array}{rl} 1, & 1 \leqslant i \leqslant M-1 \\ 1/2, & i = 0,\ i = M \end{array}\right. \qquad \rho^{(2)}(y_j) = \left[\begin{array}{rl} 1, & 1 \leqslant j \leqslant N-1 \\ 1/2, & j = 0,\ j = N \end{array}\right.$$

В методе конечных разностей дифференциальная задача математической физики заменяется конечно-разностной операторной задачей вида

$$Aw \ = \ B, \tag{5}$$

где $A : H \to H$ – оператор, действующий в пространстве сеточных функций, $B \in H$ – известная правая часть. Задача (5) называется разностной схемой. Решение этой задачи считается численным решением исходной дифференциальной задачи.

При построении разностной схемы следует аппроксимировать все уравнения краевой задачи их разностными аналогами – сеточными уравнениями, связывающими значения искомой сеточной функции в узлах сетки. Полученные таким образом уравнения должны быть функционально независимыми, а их общее количество – совпадать с числом неизвестных, т.е. с количеством узлов сетки.

Уравнение (1) во всех внутренних точках сетки аппроксимируется разностным уравнением

$$-\Delta_h w_{ij} + q_{ij} w_{ij} = F_{ij}, \quad i = \overline{1, M-1},\ j = \overline{1, N-1}, \tag{6}$$

в котором $F_{ij} = F(x_i, y_j)$, $q_{ij} = q(x_i, y_j)$, разностный оператор Лапласа

$$\begin{aligned} \Delta_h w_{ij} = \frac{1}{h_1}\Big(k(x_i + 0.5h_1, y_j)\frac{w_{i+1j} - w_{ij}}{h_1} - k(x_i - 0.5h_1, y_j)\frac{w_{ij} - w_{i-1j}}{h_1}\Big) + \\ + \frac{1}{h_2}\Big(k(x_i, y_j + 0.5h_2)\frac{w_{ij+1} - w_{ij}}{h_2} - k(x_i, y_j - 0.5h_2)\frac{w_{ij} - w_{ij-1}}{h_2}\Big). \end{aligned} \tag{7}$$

Введем обозначения правой и левой разностных производных по переменным x, y соответственно:

$$\begin{aligned} w_{x,ij} = \frac{w_{i+1j} - w_{ij}}{h_1}, \quad w_{\overline{x},ij} = w_{x,i-1j} = \frac{w_{ij} - w_{i-1j}}{h_1}, \\ w_{y,ij} = \frac{w_{ij+1} - w_{ij}}{h_2}, \quad w_{\overline{y},ij} = w_{y,ij-1} = \frac{w_{ij} - w_{ij-1}}{h_2}, \end{aligned} \tag{8}$$

а также определим сеточные коэффициенты

$$a_{ij} = k(x_i - 0.5h_1, y_j), \quad b_{ij} = k(x_i, y_j - 0.5h_2). \tag{9}$$

С учетом принятых обозначений (8) - (9) разностный оператор Лапласа можно представить в более компактном и удобном виде

$$\Delta_h w_{ij} = \big(aw_{\overline{x}}\big)_{x,ij} + \big(bw_{\overline{y}}\big)_{y,ij} \ . \tag{10}$$

В самом деле, из (7) с учётом (8) - (9) получаем

$$\begin{aligned}\Delta_h w_{ij} = \frac{1}{h_1}(a_{i+1j}w_{x,ij} - a_{ij}w_{\overline{x},ij}) + \frac{1}{h_2}(b_{ij+i}w_{y,ij} - b_{ij}w_{\overline{y},ij}) = \\ = \frac{1}{h_1}(a_{i+1j}w_{\overline{x},i+1j} - a_{ij}w_{\overline{x},ij}) + \frac{1}{h_2}(b_{ij+i}w_{\overline{y},ij+1} - b_{ij}w_{\overline{y},ij}) = \\ = \big(aw_{\overline{x}}\big)_{x,ij} + \big(bw_{\overline{y}}\big)_{y,ij} \ .\end{aligned} \tag{11}$$

Аппроксимация граничных условий для задачи описанной вариантом имеет вид:

$$w_{ij} = \varphi(x_i, y_j). \tag{12}$$

Переменные w_{ij}, заданные равенством (12), исключаются из разностной схемы, а соответствующие узлы $P_{ij}(x_i, y_j)$ – из расчетной сетки $\overline{\omega}_h$. В скалярном произведении (4) слагаемые, отвечающие данным граничным узлам, считаются равными нулю.

Замечание. Разностные схемы (5), аппроксимирующие все описанные выше краевые задачи для уравнения Пуассона с положительным потенциалом, обладают самосопряженным и положительно определенным оператором A и имеют единственное решение при любой правой части.

Соберём все уравнения, получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), состоящую из $(M-1)\times(N-1)$ уравнений и $(M-1)\times(N-1)$ неизвестной:

$$\begin{cases}
-\Delta_h w_{ij} + q_{ij}w_{ij} = F_{ij}, & i=\overline{2,M-2},\ j=\overline{2,N-2} \\
-(aw_{\bar{x}})_{x,i1} - \frac{1}{h_2}\left[(bw_{\bar{y}})_{i2} - \frac{1}{h_2}b_{i1}w_{i1}\right] + q_{i1}w_{i1} = F_{i1} + \frac{b_{i1}}{h_2^2}\varphi_{i0}, & i=\overline{2,M-2},\ j=1 \\
-(aw_{\bar{x}})_{x,i,N-1} + \frac{1}{h_2}\left[(bw_{\bar{y}})_{i,N-1} + \frac{1}{h_2}b_{iN}w_{iN-1}\right] + q_{i,N-1}w_{i,N-1} = & \\
\qquad = F_{i,N-1} + \frac{b_{iN}}{h_2^2}\varphi_{iN}, & i=\overline{2,M-2},\ j=N-1 \\
-(bw_{\bar{y}})_{y,1j} - \frac{1}{h_1}\left[(aw_{\bar{x}})_2j - \frac{1}{h_1}a_{1j}w_{1j}\right] + q_{1j}w_{1j} = F_{1j} + \frac{a_{1j}}{h_1^2}\varphi_{0j}, & i=1,\ j=\overline{2,N-2} \\
-(bw_{\bar{y}})_{y,M-1,j} + \frac{1}{h_1}\left[(aw_{\bar{x}})_M - 1, j - \frac{1}{h_1}a_{Mj}w_{M-1,j}\right] + & \\
\qquad +q_{M-1,j}w_{M-1,j} = F_{M-1,j} + \frac{a_{Mj}}{h_1^2}\varphi_{Mj}, & i=M-1,\ j=\overline{2,N-2} \\
-\frac{1}{h_1}\left[(aw_{\bar{x}})_{21} - \frac{1}{h_1}a_{11}w_{11}\right] - \frac{1}{h_2}\left[(bw_{\bar{y}})_{12} - \frac{1}{h_2}b_{11}w_{11}\right] + & \\
\qquad +q_{11}w_{11} = F_{11} + \frac{a_{11}}{h_1^2}\varphi_{01} + \frac{b_{11}}{h_2^2}\varphi_{10}, & i=1,\ j=1 \\
-\frac{1}{h_1}\left[(aw_{\bar{x}})_{2,N-1} - \frac{1}{h_1}a_{1,N-1}w_{1,N-1}\right] + & \\
\qquad +\frac{1}{h_2}\left[(bw_{\bar{y}})_{1,N-1} + \frac{1}{h_2}b_{1N}w_{1,N-1}\right] + q_{1,N-1}w_{1,N-1} & \\
\qquad = F_{1,N-1} + \frac{a_{1,N-1}}{h_1^2}\varphi_{0,N-1} + \frac{b_{1N}}{h_2^2}\varphi_{1N}, & i=1,\ j=N-1 \\
\frac{1}{h_1}\left[(aw_{\bar{x}})_{M-1,1} + \frac{1}{h_1}a_{M1}w_{M-1,1}\right] - & \\
\qquad -\frac{1}{h_2}\left[(bw_{\bar{y}})_{M-1,2} - \frac{1}{h_2}b_{M-1,2}w_{M-1,1}\right] + q_{M-1,1}w_{M-1,1} & \\
\qquad = F_{M-1,1} + \frac{a_{M1}}{h_1^2}\varphi_{M1} + \frac{b_{M-1,1}}{h_2^2}\varphi_{M-1,0}, & i=M-1,\ j=1 \\
\frac{1}{h_1}\left[(aw_{\bar{x}})_{M-1,N-1} + \frac{1}{h_1}a_{M,N-1}w_{M-1,N-1}\right] + & \\
+\frac{1}{h_2}\left[(bw_{\bar{y}})_{M-1,N-1} + \frac{1}{h_2}b_{M-1,N}w_{M-1,N-1}\right] + q_{M-1,N-1}w_{M-1,N-1} = & \\
\qquad = F_{M-1,N-1} + \frac{a_{M,N-1}}{h_1^2}\varphi_{M,N-1} + \frac{b_{M-1,N}}{h_2^2}\varphi_{M-1,N}, & i=M-1,\ j=N-1
\end{cases} \tag{13}$$

В самом деле, число уравнений системы (13) соответствует числу неизвестным $(M-1)\times(N-1)$: $(M-3)(N-3)+(M-3)+(M-3)+(N-3)+(N-3)+4=(M-3)(N-3+2)+2(N-3)+4=$ $=(M-3)(N-1)+2N-6+4=(M-3)(N-1)+2(N-1)=(M-1)(N-1)$.

Распишем подробно систему (13) выписав линейно w_{ij}:

$$
\begin{cases}
-\frac{a_{2j}}{h_1^2}w_{1j}-\frac{b_{2j}}{h_2^2}w_{2,j-1}+c_{2j}w_{2j}-\frac{b_{2,j+1}}{h_2^2}w_{2,j+1}-\frac{a_{3j}}{h_1^2}w_{3j}=F_{2j}, \qquad j=\overline{2,N-2},\\
\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\
-\frac{a_{M-2,j}}{h_1^2}w_{M-3,j}-\frac{b_{M-2,j}}{h_2^2}w_{M-2,j-1}+c_{M-2,j}w_{M-2,j}-\frac{b_{M-2,j+1}}{h_2^2}w_{M-2,j+1}-\\
\qquad -\frac{a_{M-1,j}}{h_1^2}w_{M-1,j}=F_{M-2,j}, \quad j=\overline{2,N-2};\\
\\
-\frac{a_{2,1}}{h_1^2}w_{1,1}+d_{2,1}w_{2,1}-\frac{b_{2,2}}{h_2^2}w_{2,2}-\frac{a_{3,1}}{h_1^2}w_{3,1}=F_{2,1}+\frac{b_{2,1}}{h_2^2}\varphi_{2,0},\\
\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\
-\frac{a_{M-2,1}}{h_1^2}w_{M-3,1}+d_{M-2,1}w_{M-2,1}-\frac{b_{M-2,2}}{h_2^2}w_{M-2,2}-\frac{a_{M-1,1}}{h_1^2}w_{M-1,1}=F_{M-2,1}+\frac{b_{M-2,1}}{h_2^2}\varphi_{M-2,0};\\
\\
-\frac{a_{2,N-1}}{h_1^2}w_{1,N-1}-\frac{b_{2,N-1}}{h_2^2}w_{2,N-2}+e_{2,N-1}w_{2,N-1}-\frac{a_{3,N-1}}{h_1^2}w_{3,N-1}=F_{2,N-1}+\frac{b_{2,N}}{h_2^2}\varphi_{2,N},\\
\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\
-\frac{a_{M-2,N-1}}{h_1^2}w_{M-3,N-1}-\frac{b_{M-2,N-1}}{h_2^2}w_{M-2,N-2}+e_{M-2,N-1}w_{M-2,N-1}-\\
\qquad -\frac{a_{M-1,N-1}}{h_1^2}w_{M-1,N-1}=F_{M-2,N-1}+\frac{b_{M-2,N}}{h_2^2}\varphi_{M-2,N};\\
\\
-\frac{b_{1,2}}{h_2^2}w_{1,1}+f_{1,2}w_{1,2}-\frac{b_{1,3}}{h_2^2}w_{1,3}-\frac{a_{2,2}}{h_1^2}w_{2,2}=F_{1,2}+\frac{a_{1,2}}{h_1^2}\varphi_{0,2},\\
\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\
-\frac{b_{1,N-2}}{h_2^2}w_{1,N-3}+f_{1,N-2}w_{1,N-2}-\frac{b_{1,N-1}}{h_2^2}w_{1,N-1}-\frac{a_{2,N-2}}{h_1^2}w_{2,N-2}=F_{1,N-2}+\frac{a_{1,N-2}}{h_1^2}\varphi_{0,N-2};\\
\\
-\frac{a_{M-1,2}}{h_1^2}w_{M-2,2}-\frac{b_{M-1,2}}{h_2^2}w_{M-1,1}+g_{M-1,2}w_{M-1,2}-\frac{b_{M-1,3}}{h_2^2}w_{M-1,3}=F_{M-1,2}+\frac{a_{M,2}}{h_1^2}\varphi_{M,2},\\
\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\
-\frac{a_{M-1,N-2}}{h_1^2}w_{M-2,N-2}-\frac{b_{M-1,N-2}}{h_2^2}w_{M-1,N-3}+g_{M-1,N-2}w_{M-1,N-2}-\frac{b_{M-1,N-1}}{h_2^2}w_{M-1,N-1}=\\
\qquad =F_{M-1,N-2}+\frac{a_{M,N-2}}{h_1^2}\varphi_{M,N-2};\\
\\
k_{1,1}w_{1,1}-\frac{b_{1,2}}{h_2^2}w_{1,2}-\frac{a_{2,1}}{h_1^2}w_{2,1}=F_{1,1}+\frac{a_{1,1}}{h_1^2}\varphi_{0,1}+\frac{b_{1,1}}{h_2^2}\varphi_{1,0};\\
\\
-\frac{b_{1,N-1}}{h_2^2}w_{1,N-2}+l_{1,N-1}w_{1,N-1}-\frac{a_{2,N-1}}{h_1^2}w_{2,N-1}=F_{1,N-1}+\frac{a_{1,N-1}}{h_1^2}\varphi_{0,N-1}+\frac{b_{1,N}}{h_2^2}\varphi_{1,N};\\
\\
-\frac{a_{M-1,1}}{h_1^2}w_{M-2,1}+r_{M-1,1}w_{M-1,1}-\frac{b_{M-1,2}}{h_2^2}w_{M-1,2}=F_{M-1,1}+\frac{a_{M,1}}{h_1^2}\varphi_{M,1}+\frac{b_{M-1,1}}{h_2^2}\varphi_{M-1,0};\\
\\
-\frac{a_{M-1,N-1}}{h_1^2}w_{M-2,N-1}-\frac{b_{M-1,N-1}}{h_2^2}w_{M-1,N-2}+s_{M-1,N-1}w_{M-1,N-1}=\\
\qquad =F_{M-1,N-1}+\frac{a_{M,N-1}}{h_1^2}\varphi_{M,N-1}+\frac{b_{M-1,N}}{h_2^2}\varphi_{M-1,N}.
\end{cases}
\tag{14}
$$

В уравнении (14) введены следующие обозначения:

$$
c_{i,j}=\frac{a_{i,j}+a_{i+1,j}}{h_1^2}+\frac{b_{i,j}+b_{i,j+1}}{h_2^2}+q_{i,j}, \quad d_{i,1}=\frac{a_{i,1}+a_{i+1,1}}{h_1^2}+\frac{b_{i,1}+b_{i,2}}{h_2^2}+q_{i,1},
$$

$$e_{i,N-1}=\frac{a_{i,N-1}+a_{i+1,N-1}}{h_1^2}+\frac{b_{i,N-1}+b_{i,N}}{h_2^2}+q_{i,N-1},\quad f_{1,j}=\frac{a_{1,j}+a_{2,j}}{h_1^2}+\frac{b_{1,j}+b_{1,j+1}}{h_2^2}+q_{1,j},$$

$$g_{M-1,N-2}=\frac{a_{M-1,j}+a_{M,j}}{h_1^2}+\frac{b_{M-1,j}+b_{M-1,j+1}}{h_2^2}+q_{M-1,j},\quad k_{1,1}=\frac{a_{1,1}+a_{2,1}}{h_1^2}+\frac{b_{1,1}+b_{1,2}}{h_2^2}+q_{1,1},$$

$$l_{1,N-1}=\frac{a_{1,N-1}+a_{2,N-1}}{h_1^2}+\frac{b_{1,N-1}+b_{1,N}}{h_2^2}+q_{1,N-1},\quad r_{M-1,1}=\frac{a_{M-1,1}+a_{M,1}}{h_1^2}+\frac{b_{M-1,1}+b_{M-1,2}}{h_2^2}+q_{M-1,1},$$

$$s_{M-1,N-1}=\frac{a_{M-1,N-1}+a_{M,N-1}}{h_1^2}+\frac{b_{M-1,N-1}+b_{M-1,N}}{h_2^2}+q_{M-1,N-1}.$$

Теперь представим СЛАУ (14) в записи матричного вида $Aw = B$, где $A\in\mathbb{R}^{(M-1)(N-1)\times(M-1)(N-1)}$, $w\in\mathbb{R}^{(M-1)(N-1)\times 1}$, $B\in\mathbb{R}^{(M-1)(N-1)\times 1}$.
Замечание. Вытянем сеточную функция $w_{i,j}, i=\overline{1,M-1}, j=\overline{1,N-1}$ в вектор:

$$w^T=(w_{1,1},w_{1,2},...,w_{1,N-1};w_{2,1},w_{2,2},...,w_{2,N-1};...;...;...;w_{M-1,1},w_{M-1,2},...,w_{M-1,N-1}).$$

Определим для каждого уравнения системы (13) матрицу A_k, $k=\overline{I,IX}$.
Введем следующие матрицы $A_i, B_i, C_i\in\mathbb{R}^{(N-3)\times(N-1)}$:

$$A_i=\begin{pmatrix}0 & -\frac{a_{i,2}}{h_1^2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{a_{i,3}}{h_1^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a_{i,4}}{h_1^2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{a_{i,N-2}}{h_1^2} & 0\end{pmatrix}, i=\overline{2,M-2};$$

$$B_i=\begin{pmatrix}-\frac{b_{i,2}}{h_2^2} & c_{i,2} & -\frac{b_{i,3}}{h_2^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{b_{i,3}}{h_2^2} & c_{i,3} & -\frac{b_{i,4}}{h_2^2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{b_{i,4}}{h_2^2} & c_{i,4} & -\frac{b_{i,5}}{h_2^2} & \dots & 0 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{b_{i,N-2}}{h_2^2} & c_{i,N-2} & -\frac{b_{i,N-1}}{h_2^2}\end{pmatrix}, i=\overline{2,M-2};$$

$$C_i=\begin{pmatrix}0 & -\frac{a_{i+1,2}}{h_1^2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{a_{i+1,3}}{h_1^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a_{i+1,4}}{h_1^2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{a_{i+1,N-2}}{h_1^2} & 0\end{pmatrix}, i=\overline{2,M-2};$$

Тогда матрица A_I характеризующая коэффициенты при внутренних точках сеточной функции (1 уравнение в (13), или что тоже самое первые $(M-3)\times(N-3)$ уравнения в (14)) будет иметь следующий вид:

$$A_I=\begin{pmatrix}A_2 & B_2 & C_2 & \Theta & \Theta & \Theta & \dots & \Theta & \Theta & \Theta\\ \Theta & A_3 & B_3 & C_3 & \Theta & \Theta & \dots & \Theta & \Theta & \Theta\\ \Theta & \Theta & A_4 & B_4 & C_4 & \Theta & \dots & \Theta & \Theta & \Theta\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \dots & A_{M-2} & B_{M-2} & C_{M-2}\end{pmatrix},$$

где матрицы Θ – нулевые матрицы размерами $(N-3)\times(N-1)$, а матрица $A_I\in\mathbb{R}^{(N-3)(M-3)\times(N-1)(M-1)}$. Аналогично выписываем матрицы $A_{II},...,A_{IX}$, каждая матрица также будет иметь $(N-1)(M-1)$ столбцов. Тогда итоговый вид матрицы A СЛАУ (14) будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_I \\ A_{II} \\ \dots \\ A_{IX} \end{pmatrix}.$$

Определим матрицу A_{II}. Для этого введем следующие матрицы:

$$L_{B_1 i} = \begin{pmatrix} -\frac{a_{i,1}}{h_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times(N-1)}, i = \overline{2, M-2};$$

$$L_{B_2 i} = \begin{pmatrix} d_{i,1} & -\frac{b_{i,2}}{h_2^2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times(N-1)}, i = \overline{2, M-2};$$

$$L_{B_3 i} = \begin{pmatrix} -\frac{a_{i+1,1}}{h_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times(N-1)}, i = \overline{2, M-2};$$

$$A_{II} = \begin{pmatrix} L_{B_1 2} & L_{B_2 2} & L_{B_3 2} & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & L_{B_1 3} & L_{B_2 3} & L_{B_3 3} & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \dots & \Theta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \dots & \Theta & L_{B_1 M-2} & L_{B_2 M-2} & L_{B_3 M-2} \end{pmatrix},$$

где Θ нулевые матрицы размера $1 \times (N-1)$, а матрица $A_{II} \in \mathbb{R}^{(M-3)\times(N-1)(M-1)}$.
Определим матрицу A_{III}, для этого также введем дополнительные матрицы следующего вида:

$$L_{T_1 i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{a_{i,N-1}}{h_1^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times(N-1)}, i = \overline{2, M-2};$$

$$L_{T_2 i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{b_{i,N-1}}{h_2^2} & e_{i,N-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times(N-1)}, i = \overline{2, M-2};$$

$$L_{T_3 i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{a_{i+1,N-1}}{h_1^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times(N-1)}, i = \overline{2, M-2};$$

$$A_{III} = \begin{pmatrix} L_{T_1 2} & L_{T_2 2} & L_{T_3 2} & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & L_{T_1 3} & L_{T_2 3} & L_{T_3 3} & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \dots & \Theta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \dots & \Theta & L_{T_1 M-2} & L_{T_2 M-2} & L_{T_3 M-2} \end{pmatrix},$$

где Θ нулевые матрицы размера $1 \times (N-1)$, а матрица $A_{III} \in \mathbb{R}^{(M-3)\times(N-1)(M-1)}$.
Определим матрицу A_{IV}, для этого также введем дополнительные матрицы следующего вида:

$$L_{L_1 1} = \begin{pmatrix} -\frac{b_{1,2}}{h_2^2} & f_{1,2} & -\frac{b_{1,3}}{h_2^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{1,3}}{h_2^2} & f_{1,3} & -\frac{b_{1,4}}{h_2^2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b_{1,4}}{h_2^2} & f_{1,4} & -\frac{b_{1,5}}{h_2^2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{b_{1,N-2}}{h_2^2} & f_{1,N-2} & -\frac{b_{1,N-1}}{h_2^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-3)\times(N-1)};$$

$$L_{L_2 1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{2,2}}{h_1^2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_{2,3}}{h_1^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a_{2,4}}{h_1^2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{a_{2,N-2}}{h_1^2} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-3)\times(N-1)};$$

$$A_{IV} = \begin{pmatrix} L_{L_1 1} & L_{L_2 1} & \Theta \end{pmatrix},$$

где Θ нулевые матрица размера $(N-3)\times(N-1)(M-3)$, а матрица $A_{IV}\in\mathbb{R}^{(N-3)\times(N-1)(M-1)}$. Определим матрицу A_V, для этого также введем дополнительные матрицы следующего вида:

$$L_{R_1 M-2}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{M-1,2}}{h_1^2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{a_{M-1,3}}{h_1^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a_{M-1,4}}{h_1^2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{a_{M-1,N-2}}{h_1^2} & 0 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(N-3)\times(N-1)};$$

$$L_{R_2 M-1}=\begin{pmatrix} -\frac{b_{M-1,2}}{h_2^2} & g_{M-1,2} & -\frac{b_{M-1,3}}{h_2^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{b_{M-1,3}}{h_2^2} & g_{M-1,3} & -\frac{b_{M-1,4}}{h_2^2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{b_{M-1,4}}{h_2^2} & g_{M-1,4} & -\frac{b_{M-1,5}}{h_2^2} & \dots & 0 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{b_{M-1,N-2}}{h_2^2} & g_{M-1,N-2} & -\frac{b_{M-1,N-1}}{h_2^2} \end{pmatrix},$$

$$L_{R_2 M-1}\in\mathbb{R}^{(N-3)\times(N-1)};$$

$$A_V=\begin{pmatrix}\Theta & L_{R_1 M-2} & L_{R_2 M-1}\end{pmatrix},$$

где Θ нулевые матрица размера $(N-3)\times(N-1)(M-3)$, а матрица $A_V\in\mathbb{R}^{(N-3)\times(N-1)(M-1)}$. Определим матрицу A_{VI}, для этого также введем дополнительные матрицы следующего вида:

$$C_{11}^1=\begin{pmatrix}k_{1,1} & -\frac{b_{1,2}}{h_2^2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{1\times(N-1)};$$

$$C_{11}^2=\begin{pmatrix}-\frac{a_{2,1}}{h_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{1\times(N-1)};$$

$$A_{VI}=\begin{pmatrix}C_{11}^1 & C_{11}^2 & \Theta\end{pmatrix},$$

где Θ нулевые матрица размера $1\times(N-1)(M-3)$, а матрица $A_{VI}\in\mathbb{R}^{1\times(N-1)(M-1)}$. Определим матрицу A_{VII}, для этого также введем дополнительные матрицы следующего вида:

$$C_{1,N-1}^1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{b_{1,N-1}}{h_2^2} & l_{1,N-1}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{1\times(N-1)};$$

$$C_{1,N-1}^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{a_{2,N-1}}{h_1^2}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{1\times(N-1)};$$

$$A_{VII}=\begin{pmatrix}C_{1,N-1}^1 & C_{1,N-1}^2 & \Theta\end{pmatrix},$$

где Θ нулевые матрица размера $1\times(N-1)(M-3)$, а матрица $A_{VII}\in\mathbb{R}^{1\times(N-1)(M-1)}$. Определим матрицу A_{VIII}, для этого также введем дополнительные матрицы следующего вида:

$$C_{M-1,1}^1=\begin{pmatrix}-\frac{a_{M-1,1}}{h_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{1\times(N-1)};$$

$$C_{M-1,1}^2=\begin{pmatrix}r_{M-1,1} & -\frac{b_{M-1,2}}{h_2^2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{1\times(N-1)};$$

$$A_{VIII}=\begin{pmatrix}\Theta & C_{M-1,1}^1 & C_{M-1,1}^2\end{pmatrix},$$

где Θ нулевые матрица размера $1\times(N-1)(M-3)$, а матрица $A_{VIII}\in\mathbb{R}^{1\times(N-1)(M-1)}$. Определим матрицу A_{IX}, для этого также введем дополнительные матрицы следующего вида:

$$C_{M-1,N-1}^1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{a_{M-1,N-1}}{h_1^2}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{1\times(N-1)};$$

$$C_{M-1,N-1}^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{b_{M-1,N-1}}{h_2^2} & s_{M-1,N-1}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{1\times(N-1)};$$

$$A_{XI} = \begin{pmatrix} \Theta & C^1_{M-1,N-1} & C^2_{M-1,N-1} \end{pmatrix},$$

где Θ нулевые матрица размера $1 \times (N-1)(M-3)$, а матрица $A_{IX} \in \mathbb{R}^{1\times(N-1)(M-1)}$.
Выпишем итоговую матрицу A. Пусть $\hat{\Theta}$ обозначает нулевую матрицу размерами $(N-3) \times (N-1)$, а Θ обозначает нулевую матрицу размерами $1 \times (N-1)$. Объединение матриц $A_I, ..., A_{IX}$ позволяет получить следующий вид матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix}
A_2 & B_2 & C_2 & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \dots & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} \\
\hat{\Theta} & A_3 & B_3 & C_3 & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \dots & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} \\
\hat{\Theta} & \hat{\Theta} & A_4 & B_4 & C_4 & \hat{\Theta} & \dots & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \dots & \hat{\Theta} & A_{M-2} & B_{M-2} & C_{M-2} \\
L_{B_1 2} & L_{B_2 2} & L_{B_3 2} & \Theta & \Theta & \Theta & \dots & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \\
\Theta & L_{B_1 3} & L_{B_2 3} & L_{B_3 3} & \Theta & \Theta & \dots & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \\
\Theta & \Theta & L_{B_1 4} & L_{B_2 4} & L_{B_3 4} & \Theta & \dots & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \dots & \Theta & L_{B_1 M-2} & L_{B_2 M-2} & L_{B_3 M-2} \\
L_{T_1 2} & L_{T_2 2} & L_{T_3 2} & \Theta & \Theta & \Theta & \dots & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \\
\Theta & L_{T_1 3} & L_{T_2 3} & L_{T_3 3} & \Theta & \Theta & \dots & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \\
\Theta & \Theta & L_{T_1 4} & L_{T_2 4} & L_{T_3 4} & \Theta & \dots & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \dots & \Theta & L_{T_1 M-2} & L_{T_2 M-2} & L_{T_3 M-2} \\
L_{L_1 1} & L_{L_2 1} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \dots & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} \\
\hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \dots & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & L_{R_1 M-2} & L_{R_2 M-1} \\
C^1_{11} & C^2_{11} & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \dots & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \\
C^1_{1,N-1} & C^2_{1,N-1} & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \dots & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \\
\Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \dots & \Theta & \Theta & C^1_{M-1,1} & C^2_{M-1,1} \\
\Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \dots & \Theta & \Theta & C^1_{M-1,N-1} & C^2_{M-1,N-1}
\end{pmatrix} \qquad (15)$$

Осталось выписать матрицу B. Пусть $\hat{F}_i = (F_{i2}, ..., F_{i,N-2})^T$, $i = \overline{1, M-1}$. Пусть, $\hat{\varphi}_1 = (a_{1,2}\varphi_{0,2}; a_{1,3}\varphi_{0,3}; ...; a_{1,N-2}\varphi_{0,N-2})^T$ также, $\hat{\varphi}_{M-1} = (a_{M,2}\varphi_{M,2}; a_{M,3}\varphi_{M,3}; ...; a_{M,N-2}\varphi_{M,N-2})^T$. Тогда матрица B имеет следующий вид:

$$
B = \begin{pmatrix}
\hat{F}_2 \\
\hat{F}_3 \\
\hat{F}_4 \\
\dots \\
\hat{F}_{M-2} \\
\\
F_{2,1} + \frac{b_{2,1}}{h_2^2}\varphi_{2,0} \\
F_{3,1} + \frac{b_{3,1}}{h_2^2}\varphi_{3,0} \\
F_{4,1} + \frac{b_{4,1}}{h_2^2}\varphi_{4,0} \\
\dots \\
F_{M-2,1} + \frac{b_{M-2,1}}{h_2^2}\varphi_{M-2,0} \\
\\
F_{2,N-1} + \frac{b_{2,N}}{h_2^2}\varphi_{2,N} \\
F_{3,N-1} + \frac{b_{3,N}}{h_2^2}\varphi_{3,N} \\
F_{4,N-1} + \frac{b_{4,N}}{h_2^2}\varphi_{4,N} \\
\dots \\
F_{M-2,N-1} + \frac{b_{M-2,N}}{h_2^2}\varphi_{M-2,N} \\
\\
\hat{F}_1 + \frac{1}{h_1^2}\hat{\varphi}_1 \\
\\
\hat{F}_{M-1} + \frac{1}{h_1^2}\hat{\varphi}_{M-1} \\
\\
F_{1,1} + \frac{a_{1,1}}{h_1^2}\varphi_{0,1} + \frac{b_{1,1}}{h_2^2}\varphi_{1,0} \\
\\
F_{1,N-1} + \frac{a_{1,N-1}}{h_1^2}\varphi_{0,N-1} + \frac{b_{1,N}}{h_2^2}\varphi_{1,N} \\
\\
F_{M-1,1} + \frac{a_{M,1}}{h_1^2}\varphi_{M,1} + \frac{b_{M-1,1}}{h_2^2}\varphi_{M-1,0} \\
\\
F_{M-1,N-1} + \frac{a_{M,N-1}}{h_1^2}\varphi_{M,N-1} + \frac{b_{M-1,N}}{h_2^2}\varphi_{M-1,N}
\end{pmatrix} \tag{16}
$$

4 Метод решения СЛАУ.

Приближенное решение системы уравнений (5) для сформулированных выше краевых задач может быть получено итерационным методом наименьших невязок. Этот метод позволяет получить последовательность сеточных функций $w^{(k)} \in H$, $k = 1, 2, \dots$, сходящуюся по норме пространства H к решению разностной схемы, т.е.

$$
\|w - w^{(k)}\|_E \to 0, \quad k \to +\infty.
$$

Начальное приближение $w^{(0)}$ можно выбрать любым способом, например, равным нулю во всех точках расчетной сетки.

Метод является одношаговым. Итерация $w^{(k+1)}$ вычисляется по итерации $w^{(k)}$ согласно равенствам:

$$
w_{ij}^{(k+1)} = w_{ij}^{(k)} - \tau_{k+1} r_{ij}^{(k)}, \tag{17}
$$

где невязка $r^{(k)} = Aw^{(k)} - B$, итерационный параметр

$$\tau_{k+1} = \frac{\left[Ar^{(k)}, r^{(k)}\right]}{\left\|Ar^{(k)}\right\|_E^2}.$$

В качестве условия остановки итерационного процесса возьмем неравенство

$$\|w^{(k+1)} - w^{(k)}\|_E < \varepsilon,$$

где ε – положительное число, определяющее точность итерационного метода. Константу ε для данной задачи возьмем равной 10^{-6}.
Для того, чтобы представленный итерационный метод работал корректно, необходимо переставить блоки матрицы (15) так, чтобы имело место диагональное преобладание:

$$A = \begin{pmatrix}
C_{11}^1 & C_{11}^2 & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \dots & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \\
L_{L_1 1} & L_{L_2 1} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \dots & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} \\
C_{1,N-1}^1 & C_{1,N-1}^2 & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \dots & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \\
L_{B_1 2} & L_{B_2 2} & L_{B_3 2} & \Theta & \Theta & \Theta & \dots & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \\
A_2 & B_2 & C_2 & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \dots & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} \\
L_{T_1 2} & L_{T_2 2} & L_{T_3 2} & \Theta & \Theta & \Theta & \dots & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \\
\Theta & L_{B_1 3} & L_{B_2 3} & L_{B_3 3} & \Theta & \Theta & \dots & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \\
\hat{\Theta} & A_3 & B_3 & C_3 & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \dots & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} \\
\Theta & L_{T_1 3} & L_{T_2 3} & L_{T_3 3} & \Theta & \Theta & \dots & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \\
\Theta & \Theta & L_{B_1 4} & L_{B_2 4} & L_{B_3 4} & \Theta & \dots & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \\
\hat{\Theta} & \hat{\Theta} & A_4 & B_4 & C_4 & \hat{\Theta} & \dots & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} \\
\Theta & \Theta & L_{T_1 4} & L_{T_2 4} & L_{T_3 4} & \Theta & \dots & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \dots & \Theta & L_{B_1 M-2} & L_{B_2 M-2} & L_{B_3 M-2} \\
\hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \dots & \hat{\Theta} & A_{M-2} & B_{M-2} & C_{M-2} \\
\Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \dots & \Theta & L_{T_1 M-2} & L_{T_2 M-2} & L_{T_3 M-2} \\
\Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \dots & \Theta & \Theta & C_{M-1,1}^1 & C_{M-1,1}^2 \\
\hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & \dots & \hat{\Theta} & \hat{\Theta} & L_{R_1 M-2} & L_{R_2 M-1} \\
\Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & \dots & \Theta & \Theta & C_{M-1,N-1}^1 & C_{M-1,N-1}^2
\end{pmatrix}. \tag{18}$$

В связи с этим, матрица B будет иметь вид:

$$B = \begin{pmatrix} F_{1,1} + \frac{a_{1,1}}{h_1^2}\varphi_{0,1} + \frac{b_{1,1}}{h_2^2}\varphi_{1,0} \\ \\ \hat{F}_1 + \frac{1}{h_1^2}\hat{\varphi}_1 \\ \\ F_{1,N-1} + \frac{a_{1,N-1}}{h_1^2}\varphi_{0,N-1} + \frac{b_{1,N}}{h_2^2}\varphi_{1,N} \\ \\ F_{2,1} + \frac{b_{2,1}}{h_2^2}\varphi_{2,0} \\ \hat{F}_2 \\ F_{2,N-1} + \frac{b_{2,N}}{h_2^2}\varphi_{2,N} \\ F_{3,1} + \frac{b_{3,1}}{h_2^2}\varphi_{3,0} \\ \hat{F}_3 \\ F_{3,N-1} + \frac{b_{3,N}}{h_2^2}\varphi_{3,N} \\ F_{4,1} + \frac{b_{4,1}}{h_2^2}\varphi_{4,0} \\ \hat{F}_4 \\ F_{4,N-1} + \frac{b_{4,N}}{h_2^2}\varphi_{4,N} \\ \dots \\ F_{M-2,1} + \frac{b_{M-2,1}}{h_2^2}\varphi_{M-2,0} \\ \hat{F}_{M-2} \\ F_{M-2,N-1} + \frac{b_{M-2,N}}{h_2^2}\varphi_{M-2,N} \\ \\ F_{M-1,1} + \frac{a_{M,1}}{h_1^2}\varphi_{M,1} + \frac{b_{M-1,1}}{h_2^2}\varphi_{M-1,0} \\ \\ \hat{F}_{M-1} + \frac{1}{h_1^2}\hat{\varphi}_{M-1} \\ \\ F_{M-1,N-1} + \frac{a_{M,N-1}}{h_1^2}\varphi_{M,N-1} + \frac{b_{M-1,N}}{h_2^2}\varphi_{M-1,N} \end{pmatrix}. \tag{19}$$